

विषमता -SKEWNESS

कोई एक सांख्यिकीय माप श्रेणी की सभी विशेषताओं को प्रदर्शित करने में असमर्थ है। माध्य जहां कन्द्रीय प्रवृत्ति को बताता है वहां अपकिरण के माप केन्द्रीय प्रवृत्ति से श्रेणी के पदों की विचलनता को प्रकट करते हैं, परन्तु श्रेणी का स्वरूप (shape) कैसा है अर्थात् पदों का वितरण सममितीय (Symmetrical) है अथवा असममितीय (Asymmetrical), इसका ज्ञान विषमता के मापों द्वारा ही सम्भव हो पाता है।

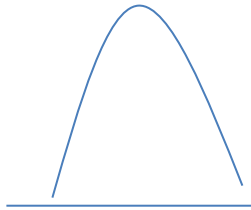
विषमता का अर्थ (Meaning of Skewness)

किसी समंकमाला में सममिति के अभाव को विषमता (Skewness) अथवा असममितता (Asymmetry) कहते हैं, अर्थात् किसी वितरण में सममिति से दूर हटने की प्रवृत्ति विषमता कहलाती है। सिम्पसन व काफका के अनुसार “विषमता अथवा असममिति किसी आवृत्ति वितरण की एक विशेषता है जो वर्ग के एक ओर अधिकतम आवृत्ति के साथ दूसरी ओर की अपेक्षा अधिक बढ़ जाती है। विषमता का माप (Measure of Skewness) एक ऐसा संख्यात्मक माप होता है जो किसी समंकमाला की असममित प्रकृति को प्रकट करता विषमता किसी समंकमाला के आवृत्ति - वितरण के वक्र की बनावट से सम्बन्धित होती है। पूर्णतः सममित वितरण केवल भौतिक विज्ञानों में ही सम्भव हो सकता है।

आवृत्ति वितरण के प्रकार (Types of Frequency Distribution)

सामान्यतः आवृत्ति वितरण निम्न प्रकार के हो सकते हैं :

(1) सामान्य वितरण (Normal Distribution) - इसके वक्र को सामान्य वक्र (Normal Curve) या विभ्रम का सामान्य वक्र (Normal Curve of Error) कहते हैं। प्रायः यह देखने में आता है कि प्रारम्भ में मूल्यों की आवृत्तियां कम होती हैं। धीरे - धीरे आवृत्तियां बढ़ती जाती हैं और अन्त में फिर कम हो जाती हैं। यदि इन आवृत्तियों को बिन्दुरेखीय - पत्र पर प्रदर्शित किया जाए तो घण्टी के आकार का वक्र (Bell - shaped Curve) बनेगा। इस वक्र को यदि बीच से मोड़ दिया जाए तो मोड़ के एक ओर का वक्र दूसरी ओर के वक्र को पूर्ण रूप से आच्छादित कर लेगा। यहां मध्यका, भूयिष्ठक एवं माध्य सभी एक बिन्दु पर ही होते हैं पर होगी और विषमता का अभाव होगा। चित्र संख्या 1 से यह स्पष्ट।

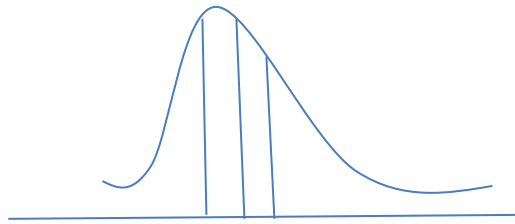


सामान्य वितरण ($X=M=Z$)

(2) विषम वितरण (Asymmetrical Distribution)- इस प्रकार के आवृत्ति वितरण में आवृत्तियां भूयिष्ठक के एक ओर अधिक तथा दूसरी ओर कम होती हैं। यहां मध्यका, भूयिष्ठक और समान्तर माध्य सभी एक

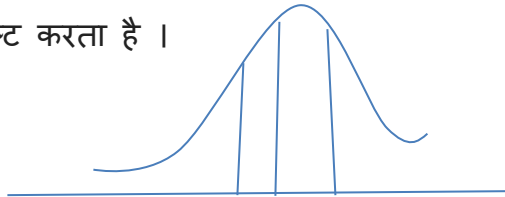
बिन्दु पर नहीं होते । इस प्रकार की श्रेणी विषम श्रेणी (Skewed Series) कहलाती है और उसमें विषमता (Skewness) होती है । यह विषमता भी दो प्रकार की हो सकती है :

(क) धनात्मक (Positive) -यदि समान्तर माध्य का मूल्य मध्यका से अधिक है और मध्यका का भूयिष्ठक से अधिक है तो विषमता धनात्मक (+) होगी । दूसरे शब्दों में , यदि वक्र दाहिनी ओर अधिक झुका है तो विषमता धनात्मक होगी । धनात्मक विषमता को अनुलोम विषमता भी कहते हैं । ऐसी श्रेणी को 3 बिन्दु रेखीय - पत्र की सहायता से प्रदर्शित किया जाए तो वक्र का लम्बा सिरा अधिक मूल्य वाले स्थानों को जाता है । धनात्मक विषमता में पहले भूयिष्ठक , फिर मध्यका और फिर समान्तर माध्य आता है ।



धनात्मक विषमता ($X > M > Z$)

(ख) ऋणात्मक (Negative)- वक्र ऋणात्मक रूप में भी विषम (Negatively Skewed) हो सकता है । यदि समान्तर माध्य का मूल्य मध्यका से कम है और मध्यका बहुलक से कम होती है तो विषमता ऋणात्मक (-) होगी । ऐसी दशा में वक्र बायीं ओर अधिक झुका होता है । ऋणात्मक विषमता को विलोम विषमता भी कहते हैं । यदि ऐसी श्रेणी को बिन्दु रेखा द्वारा प्रदर्शित किया जाए तो वक्र का लम्बा सिरा कम मूल्य वाले स्थानों को जाता है । ऋणात्मक विषमता में पहले समान्तर माध्य , फिर मध्यका और सबके पश्चात् भूयिष्ठक आता है । चित्र 3 इसको स्पष्ट करता है ।



ऋणात्मक विषमता ($X < M < Z$)

विषमता की जांच (Test of Skewness)- इस बात की जांच करने के लिए कि किसी श्रेणी में विषमता है या नहीं , निम्न आधार हैं :

(1) माध्यों का सम्बन्ध- यदि किसी श्रेणी में मध्यका , समान्तर माध्य और भूयिष्ठक का मूल्य समान होता है , तो वहां विषमता नहीं होती है । इन तीन माध्यों के मूल्य में जितना अधिक अन्तर होगा , वहां विषमता उतनी ही अधिक होगी । श्रेणी के धनात्मक रूप से विषम (Positively Skewed) होने पर पहले भूयिष्ठक , फिर मध्यका और तत्पश्चात् समान्तर माध्य आता है । श्रेणी के ऋणात्मक रूप से विषम होने पर पहले समान्तर माध्य , फिर मध्यका और अन्त में भूयिष्ठक आता है ।

(2) **विचलनों का योग-** यदि माध्य , मध्यका या भूयिष्ठक से लिए गए धनात्मक (+) विचलनों का योग ऋणात्मक (-) विचलनों के योग के बराबर होता है , तो विषमता नहीं होती । दोनों विचलनों के अन्तर की मात्रा पर विषमता निर्भर करती है ।

(3) **भूयिष्ठक के दोनों ओर आवृत्तियां** — यदि भूयिष्ठक के दोनों ओर की आवृत्तियों का योग बराबर होता है , तो विषमता नहीं होती ।

(4) **मध्यका से विभाजन मूल्यों की दूरी** — यदि मध्यका से प्रथम चतुर्थक (Q1) और तृतीय चतुर्थक (Q3) का अन्तर बराबर हो , तो विषमता नहीं होती । यदि दशमक या शतमक के जोड़े (D. और D10 अथवा P10 और P0) मध्यका से समान दूरी पर हों तो विषमता नहीं होती ।

(5) **वक्र** — यदि समंकमाला को वक्र द्वारा प्रदर्शित करने पर एक सामान्य वक्र (Normal Curve) बने और यदि बीच में उस वक्र को मोड़ दिया जाए और एक भाग दूसरे को पूर्ण रूप से आच्छादित कर ले , तो विषमता नहीं होगी । जहां उपर्युक्त परिस्थितियां जितने अंशों में नहीं होंगी , वहां विषमता उतने ही अंशों में होगी ।

अपकिरण तथा विषमता में अन्तर

आवृत्ति वितरण के सम्बन्ध में माध्य एक अधूरी जानकारी है और इस कमी को अपकिरण के माप पूरा करते हैं जबकि विषमता का माप एक ऐसा संख्यात्मक माप है जो किसी समंक श्रेणी की असममितता (Asymmetry) को प्रकट करता है । इस आधार पर यह कहा जा सकता है कि अपकिरण तथा विषमता में अन्तर है जिन्हें निम्न प्रकार से प्रकट किया जा सकता है :

(1) अपकिरण के द्वारा किसी श्रेणी के पद - मूल्यों का बिखराव या वितरण की बनावट का ज्ञान होता है , जबकि विषमता के माप यह स्पष्ट करते हैं कि आवृत्ति वक्र सममित है अथवा असममित । यदि असममित है तो धनात्मक विषमता है अन्यथा ऋणात्मक विषमता ।

(2) अपकिरण में विभिन्न पदों के समूह में स्थिति पर विचार किया जाता है जबकि विषमता में उनकी प्रवृत्ति पर । (3) अपकिरण समूह की बनावट (Composition) का ज्ञान कराता है जबकि विषमता समूह (Shape) पर प्रकाश डालती है ।

(4) अपकिरण के माप द्विघातीय माध्यों पर आधारित हैं जबकि विषमता के माप प्रथम घातीय माध्यों पर आधारित हैं ।

(5) अपकिरण पदमाला के आकार और आवृत्तियों की सघनता बतलाते हैं जबकि विषमता पद श्रेणी के दो भागों के आकार व सघनता का तुलनात्मक अध्ययन करते हैं ।

(6) अपकिरण से यह स्पष्ट नहीं होता है कि समान्तर माध्य की किस दिशा में विचरण अधिक है । उससे माध्य विचरण का पता चलता है जबकि विषमता इसकी दिशा की ओर स्पष्ट रूप से संकेत करती है । उपर्युक्त अन्तर होते हुए भी अपकिरण एवं विषमता के माप एक - दूसरे के अनुपूरक हैं । वस्तुतः आवृत्ति

वितरण के वैज्ञानिक एवं विधिवत् विश्लेषण के लिए केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप ,अपकिरण एवं विषमता तीनों का अध्ययन नितान्त आवश्यक है ।

विषमता के माप

विषमता की धनात्मक एवं ऋणात्मक प्रकृति का ज्ञान प्राप्त करने के लिए विषमता के माप का प्रयोग किया जाता है । विषमता - माप निरपेक्ष (Subjective or Abstract) व सापेक्ष (Relative) दोनों हो सकते हैं । विषमता के निरपेक्ष माप द्वारा श्रेणी में विषमता की कुल मात्रा का तथा उसके धनात्मक (+) या ऋणात्मक (-) होने का पता लगता है । किन्तु यह माप तुलना योग्य नहीं होते । अतः तुलनात्मक अध्ययन के लिए सापेक्ष माप निकाले जाते हैं जिनको विषमता गुणांक (coefficient of skewness) कहते हैं । इस गुणांक को संकेताक्षर J से प्रदर्शित करते हैं । जिस श्रेणी में विषमता गुणांक कम होता है उसमें आवृत्तियां सममिति रूप में वितरित (More symmetrically distributed) होती हैं ।

विषमता के माप (Measures of Skewness) विषमता ज्ञात करने की तीन प्रमुख रीतियां हैं :

(i) विषमता की प्रथम माप (First Measure of Skewness)

(ii) विषमता की द्वितीय माप (Second Measure of Skewness)

(iii) विषमता की तृतीय माप (Third Measure of Skewness) FIRST

(1) विषमता का प्रथम माप अर्थात् कार्ल पियर्सन विषमता गुणांक (First Measure of Skewness or Karl Pearson's Coefficient of Skewness)

(a) समान्तर माध्य एवं भूयिष्ठक के अन्तर पर आधारित माप : विषमता , $Sk = \frac{\text{माध्य} - \text{भूयिष्ठक}}{\text{प्रमाप विचलन}}$ अथवा ($X - Z$)

$$\text{विषमता गुणांक } J = \frac{\text{माध्य} - \text{बहुलक}}{\text{प्रमाप विचलन}}$$

(b) समान्तर माध्य तथा माध्यिका के अन्तर पर आधारित माप : यदि भूयिष्ठक स्पष्ट न हो तो कार्ल पियर्सन का निम्न वैकल्पिक सूत्र प्रयोग किया जाता है :

विषमता , $Sk = 3 \left(\frac{\text{माध्य} - \text{माध्यिका}}{\text{प्रमाप विचलन}} \right)$ अथवा $3 \left(\frac{X - M}{\text{प्रमाप विचलन}} \right)$

$$\text{विषमता गुणांक } J = \frac{3(\text{माध्य} - \text{माध्यिका})}{\text{प्रमाप विचलन}}$$