

अपकिरण की माप

(Measures of Dispersion)

किसी समंक के प्रतिनिधि मान अर्थात् माध्य , माध्यिका , बहुलक समंक के विषय में बहुत ही उपयोगी जानकारी प्रदान करते हैं , परन्तु इनके द्वारा प्रदत्त जानकारी अपने आप में पूर्ण नहीं होती । विशेषकर यह प्रतिनिधि मान आँकड़ों की विचरणशीलता अथवा केन्द्रीय मान के दोनों और आँकड़ों के वितरण की व्याख्या नहीं करते । उदाहरणार्थ किसी राष्ट्र की औसत प्रति व्यक्ति आय (Average per capita income) राष्ट्र के आर्थिक विकास के स्तर की एक महत्वपूर्ण मापक है । परन्तु औसत प्रति व्यक्ति आय देश में आय वितरण के स्वरूप पर कोई प्रकाश नहीं डालती । औसत प्रति व्यक्ति आय के आधार पर यह निष्कर्ष निकालना सम्भव नहीं है कि देश में धनी एवं निर्धन वर्ग की आय को असमानतायें अधिक हैं अथवा कम । न ही इसके आधार पर यह ज्ञात हो सकता है कि देश में गरीबी रेखा (Poverty Line) के नीचे जीवनयापन करने वाले व्यक्तियों की संख्या क्या है , अथवा अत्यधिक उच्च आय अर्जित करने वाले व्यक्तियों की संख्या क्या है । इसे हम इस प्रकार भी समझ सकते हैं कि किसी नहर की औसत गहराई 4 फूट है ऐसे में यदि केवल इस औसत के आधार पर सोचें तो 5 फूट का कोई भी मनुष्य बिना डूबे नहर पार कर जायेगा लेकिन नहर कहीं अधिक गहरी तो कहीं कम गहरी भी हो सकती है ऐसे में केवल औसत के आधार पर मनुष्य डूब सकता है। अन्य शब्दों में किसी समंक अथवा आँकड़ों के किसी समूह के विषय में सम्पूर्ण परिप्रेक्ष्य के लिये यह आवश्यक है कि आँकड़ों के प्रतिनिधि मान के अतिरिक्त हमें आँकड़ों की विचरण शीलता (Variability) अथवा प्रतिनिधि मान के दोनों ओर आँकड़ों के वितरण का भी ज्ञान होना चाहिए ।

अपकिरण की अवधारणा (CONCEPT OF DISPERSION)

केवल माध्य को ज्ञात करके हम समंकमाला के बारे में सही एवं पूर्ण जानकारी प्राप्त नहीं कर सकते हैं । माध्य के साथ - साथ आवृत्ति - वितरण (frequency distribution) के आकार का ज्ञान भी सच्चे परिणाम पर पहुंचने के लिए आवश्यक है । अर्थात् यह जानना आवश्यक है कि पदमाला का प्रत्येक पद माध्य से कितनी दूरी पर है या कितना बड़ा या छोटा है । इस विचलन की दूरी पर फैलाव , बिखराव या विस्तार को ही अपकिरण (Dispersion) कहते हैं । अपकिरण का अर्थ (Meaning of Dispersion) अपकिरण का प्रयोग दो अर्थों में किया जाता है :

(अ) प्रथम अर्थ में , अपकिरण से तात्पर्य पद श्रेणी के सीमान्त पदों के विस्तार या सीमा - विस्तार से है । दूसरे शब्दों अपकिरण उन सीमाओं के अन्तर को प्रकट करता है जिसके अन्तर्गत श्रेणी के पद पाये जाते हैं ।

(ब) दूसरे अर्थों में , अपकिरण से तात्पर्य पदमाला के माध्य से लिये गये विचलनों का माध्य (Average of the deviations from an average of the series) है । अन्य शब्दों में , अपकिरण हमें यह बताता है कि श्रेणी की केन्द्रीय प्रवृत्ति के एक निश्चित माप से विभिन्न मूल्यों की औसत दूरी क्या है । इस सम्बन्ध में यह ध्यान देने योग्य बात है कि अपकिरण के इन दोनों अर्थों में पायी जानी वाली भिन्नता पर ही अपकिरण के माप की विभिन्न रीतियां निर्भर हैं । अपकिरण का माप पहले अर्थ में सीमाओं की रीति (Method of Limits) द्वारा और दूसरे अर्थ में विचलनों के माध्य (Average of Deviations) द्वारा निकाला जाता है ।

अपकिरण की परिभाषा (Definition of Dispersion)

1. डॉ . बॉउले के अनुसार , " अपकिरण पदों के विचलन का माप है । "

2. कॉनर के शब्दों में , " जिस सीमा तक व्यक्तिगत पदों में भिन्नता होती है उस माप को अपकिरण कहते हैं ।

3. ब्रक्स एवं डिक के शब्दों में , " अपकिरण अथवा प्रसार एक केन्द्रीय मूल्य के इधर - उधर चल - मूल्यों के विचरण अथवा बिखराव की सीमा है । " 3

4. स्पीगल के अनुसार , " वह सीमा जहां तक संख्या सम्बन्धी समंक किसी माध्य मूल्य के आस - पास फैलने की प्रवृत्ति रखते हैं , उन समंकों का विचरण या अपकिरण कहलाती है । ' ' अपकिरण की माप (Measure of Dispersion) काफ़का के अनुसार , " किसी श्रेणी में किसी माध्य के निकट संख्याओं के ढेर के बिखराव का माप विचरण या अपकिरण का माप कहलाता है । " औपचारिक रूप में विचरणशीलता को इस प्रकार परिभाषित किया जाता है केन्द्रीय मान से आंकड़ों की औसत दूरी अथवा मान (प्रतिनिधि मान) के दोनों ओर आंकड़ों के वितरण को विचरणशीलता अथवा अपकिरण कहते हैं ।

विचरणशीलता की माप के उद्देश्य

1. आंकड़ों में विचरणशीलता की माप के द्वारा केन्द्रीय मानों की विश्वसनीयता (Reliability) की पुष्टि होती है । यदि किसी समंक समूह में विचरणशीलता अत्यधिक है तो ऐसी स्थिति में सम्बन्धित औसत आंकड़ों का प्रतिनिधित्व सन्तोषजनक रूप में नहीं करते । इसके विपरीत यदि किसी समंक समूह में कम विचरणशीलता है तो सम्बन्धित औसत आंकड़ों का प्रतिनिधित्व सन्तोषजनक रूप में करते हैं । किसी समंक समूह में विचरणशीलता जितनी ही कम होगी , औसत अथवा प्रतिनिधि मान उतना ही अधिक विश्वसनीय होगा ।

2. विचरणशीलता की माप आंकड़ों के समूह में विचरणशीलता नियंत्रित करने में सहायक होती है । जैसे किसी फैक्ट्री के उत्पादन में उत्पाद के गुण (Product Quality) में अत्यधिक विचरणशीलता की स्थिति में फैक्ट्री उत्पाद के गुण को नियन्त्रित करने के लिये प्रभावी कदम उठा सकती है ।

3. विचरणशीलता की माप के द्वारा दो समंक श्रेणियों का तुलनात्मक अध्ययन सम्भव होता है । विचरणशीलता को माप किसी समंक श्रेणी के स्वरूप एवं संरचना के विषय में (माध्य की तुलना में) अधिक विश्वसनीय जानकारी देती है ।

विचरणशीलता की माप के वांछनीय तत्व (Desirable Features of a Good Measure of Dispersion) विचरणशीलता अथवा अपकिरण के एक आदर्श मापक में निम्न तत्वों का समावेश होना चाहिये

1. मापक को स्पष्ट रूप से परिभाषित होना चाहिये ।
2. समझने में सरल होना चाहिये ।
3. गणना करने में आसान होना चाहिये ।
4. मापक को समंक के सभी मूल्यों पर आधारित होना चाहिए ।
5. मापक को सामान्य गणितीय क्रियाओं के लिये उपयुक्त होना चाहिए ।

6. इसे न्यादर्श परिवर्तन के द्वारा अत्यधिक प्रभावित नहीं होना चाहिये ।

विचरणशीलता अथवा अपकिरण के मापन की रीतियां (METHODS OF MEASURING DISPERSION)

यह पूर्व ही बताया जा चुका है कि अपकिरण का प्रयोग दो अर्थों में होता है । इन्हीं अर्थों के आधार पर अपकिरण ज्ञात करने की दो प्रमुख गणितीय रीतियां हैं । गणितीय रीतियों के अतिरिक्त बिन्दु रेखाओं द्वारा भी अपकिरण को प्रदर्शित किया जा सकता है । अतः अपकिरण ज्ञात करने की रीतियां निम्नलिखित हैं

(1) सीमा रीति (Method of Limits) :

(क) विस्तार (Range) ,

(ख) अन्तर - चतुर्थक (Inter - Quartile Range) ,

(ग) शतमक विस्तार (Percentile Range) ।

(2) विचलन मध्यक रीति (Method of Averaging Deviations) :

(क) चतुर्थक विचलन या अर्ध - अन्तर चतुर्थक विस्तार (Quartile Deviation or Semi Inter - quartile Range) ,

(ख) माध्य विचलन (Mean Deviation) ,

(ग) प्रमाप विचलन (Standard Deviation) ।

(3) बिन्दुरेखीय रीति (Graphic Method) :

लॉरेंज वक्र (Lorenze Curve)

विचरणशीलता के इन मापों को द्वितीय श्रेणी के माध्य (Averages of Second order) की संज्ञा दी जाती है । इसका कारण यह है कि विचरणशीलता ज्ञात करने के लिये हम सर्वप्रथम आंकड़ों के केन्द्रीय मान (जिन्हें प्रथम श्रेणी के माध्य (Averages of first order) कहा जाता है) से विचलन (deviations) ज्ञात करते हैं , तत्पश्चात् इन विचलन के माध्य आंकड़ों की विचरणशीलता को प्रदर्शित करते हैं

विस्तार-Range

विस्तार (THE RANGE) किसी समंक श्रेणी में सबसे बड़े मूल्य और सबसे छोटे मूल्य के अन्तर को उसका विस्तार कहते हैं । यदि यह अन्तर कम है तो श्रेणी नियमित और अधिक है तो श्रेणी अनियमित मानी जायेगी । यह अपकिरण ज्ञात करने की सबसे सरल रीति है । इसका कारण यह है कि इसकी गणन क्रिया बहुत ही आसान है । गणना क्रिया (i) सबसे पहले पदमाला के न्यूनतम एवं अधिकतम मूल्य ज्ञात किये जाते हैं । खण्डित एवं अविच्छिन्न श्रेणी में दी गयी आवृत्तियों को ध्यान में नहीं रखा जाता है । अविच्छिन्न श्रेणी में प्रथम वर्ग की निम्न सीमा ही न्यूनतम मूल्य होता है और अधिकतम या अन्तिम वर्ग की उच्च सीमा अधिकतम मूल्य होता है ।

(ii) निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है : $R = L - S$, यहां , R = represents Range (विस्तार) L= represents maximum value (अधिकतम मूल्य) S = represents minimum value (न्यूनतम मूल्य) विस्तार का गुणांक (COEFFICIENT OF RANGE) विस्तार निरपेक्ष माप है जिसकी सहायता से श्रेणियों में ठीक प्रकार से तुलना नहीं हो सकती । इनको तुलना योग्य बनाने के लिए सापेक्ष रूप में बदलना पड़ेगा । इस कार्य के लिए विस्तार का गुणांक निकाला जायेगा ।

माध्य विचलन (Mean Deviation)

विचरणशीलता की अब तक चर्चित मापों — परिसर का प्रमुख दोष यह था कि समंकों के केवल दो मूल्यों पर ही आधारित थे । यह समंकों के अन्य मूल्यों की उपेक्षा करते हैं । विचरणशीलता की आदर्श माप समंकों के सभी मूल्यों पर आधारित होनी चाहिये । इस प्रकार की एक माप है माध्य विचलन (Mean Deviation) । जैसा कि नाम से ही स्पष्ट है । ' माध्य विचलन ' , विचलनों (deviations) के औसत को व्यक्त करता है— इन विचलनों की गणना समंकों के किसी केन्द्रीय मान (माध्य , माध्यिका अथवा बहुलक) से की जाती है । सामान्य तौर पर माध्य विचलन की गणना के लिये प्रयुक्त विचलनों की गणना हम समंकों के माध्य (Mean) से ही करते हैं — इसका कारण यह है कि अधिकांशतया माध्यिका आंकड़ों के प्रतिनिधि मान को व्यक्त नहीं करती तथा बहुधा यह भी देखने में आता है कि आंकड़ों के बहुलक (Mode) का अस्तित्व ही नहीं होता , अथवा आंकड़ों में एक से अधिक बहुलक मान उपस्थित होते हैं ।

माध्य विचलन की गणना की प्रक्रिया में इस प्रकार सर्वप्रथम हम समंकों के मूल्यों का माध्य से विचलन ज्ञात करते हैं — अर्थात् प्रत्येक समंक मूल्य में से माध्य के मान को घटाते हैं । तत्पश्चात् विचलनों के चिन्हों (Signs) की उपेक्षा करते हुए हम विचलनों को औसत ज्ञात करते हैं । विचलनों के बीजगणितीय चिन्हों (Algebraic signs) की उपेक्षा करने का कारण यह है कि माध्य से विचलनों का योग सदैव शून्य के बराबर होता है क्योंकि विचलनों के योग की प्रक्रिया में धनात्मक तथा ऋणात्मक विचलन एक दूसरे को पूर्णतया निरस्त कर देते हैं । यदि चरराशि के मूल्यों को ' X ' के द्वारा व्यक्त किया जाय तो चरराशि के मूल्यों का माध्य = \bar{X} से विचलन अब हम विचलनों के बीजगणितीय चिन्हों की उपेक्षा करते हुए , इनके निरपेक्ष मानों (Absolute values) अथवा परिमाणों को ज्ञात करते हैं । विचलनों के निरपेक्ष मानों को दो खड़ी लकीरों ' | ' के बीच रखकर व्यक्त किया जाता है , अर्थात् विचलनों के निरपेक्ष मान = $|X - \bar{X}|$

$|X - \bar{X}|$ किसी राशि के परिमाण अथवा निरपेक्ष मान लो व्यक्त करता है , तथा इसे हम इस प्रकार पढ़ते हैं Mod . of (X - X)
माध्य विचलन= विचलनों का योग/ विचलनों की संख्या

$$= \frac{\sum |X - \bar{X}|}{N} \text{ जहाँ } \sum |X - \bar{X}| \text{ निरपेक्ष विचलनों के योग तथा ' N ' आंकड़ों की संख्या को प्रदर्शित करता है ।}$$

यदि विचलनों को dx ' के द्वारा प्रदर्शित किया जाय अर्थात् यदि $dx = (X - \bar{X})$ तो

$$MD = \frac{\sum |dx|}{N}$$

जहाँ MD = माध्य विचलन ।